Lösung der Aufgaben von gestern

- *hit-or-miss* mit verkleinertem Quader. Man kann ausnutzen, dass

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \exp(x+y+z)\mathsf{dx\ dy\ dz} = 1+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (\exp(x+y+z)-1)\mathsf{dx\ dy\ dz}.$$

- Die Konstante 1 kann somit zunächst vernachlässigt und nach der Simulation wieder addiert werden.

- Die Obergrenze der Wertemenge der angepassten Funktion reduziert sich auf $e^3 - 1 = 19.08$.

- $E(X) = 4.07$ und $\sqrt{Var(X)} \approx \sqrt{4.07(19.08-4.07)} = 7.81$.

- Die Länge der KIe verkürzt sich also um ca 12%.

- Angepasstes Programm:

```
lower.limit <- 0
upper.limit <- exp(3)-1
runs <- 1000
hitcounter <-0
for (run in 1:runs){
measurement.point <- runif(3)
point.value <- exp(sum(measurement.point))-1
hitormiss <- runif(1, lower.limit, upper.limit)
if (hitormiss <= point.value) hitcounter <- hitcounter + 1
}
1+upper.limit*hitcounter/runs
```

Versuch zu antithetischen Zufallszahlen

- Hier exemplarisch für den Erwartungswertansatz:

```
mcfunk.anti <- function(runs=1000, alpha=0.05){
 point.values <- rep(0, runs)
 for (i in 1:(runs/2)){
  measurement.point <- runif(3)
  point.values[i] <- exp(sum(measurement.point))
  point.values[i+(runs/2)] <- exp(sum(1-measurement.point))
  }
 integralsum <- mean(point.values); estsd <- sqrt(var(point.valu
 cat("Bei ", runs, " Wiederholungen ergibt sich ein 1-",
     alpha,"KI von [")
 cat(integralsum - qnorm(1-alpha/2)*estsd/sqrt(runs), " ; ")
 cat(integralsum + qnorm(1-alpha/2)*estsd/sqrt(runs), "]\n")}
```

- Leider scheint dieses Problem ungeeignet, um durch antithetische Wahl eine Varianzreduktion zu erreichen:

- ```
  > mcfunk.anti(10000, 0.05)
  Bei  10000  Wiederholungen ergibt sich ein 1- 0.05 KI
                       von [5.006182  ; 5.107054 ]
  > mcfunk(10000, 0.05)
  Bei  10000  Wiederholungen ergibt sich ein 1- 0.05 KI
                       von [4.996663  ; 5.098519 ]
  ```
  ```

Das `replicate()` Kommando

- Allg. Form: `replicate(n,` *`expression`*`)`
- `replicate` wiederholt den Code in *expression* n Mal. Das Ergebnis wird in einem Vektor zurückgegeben.
- Beispiel:

```
onetime <- function(){runif(1)}
replicate(10, onetime())
```

- Eine typische Anwendung wäre bei einer Monte-Carlo Simulation genau ein Experiment zu programmieren und dann anstelle einer `for` Schleife mit einem Ergebnisvektor `replicate` für die Wiederholung zu nutzen.

- Auch hierfür ein Beispiel:

```
oneExperiment <- function() {
  measurement.point <- runif(3)
  point.value <- exp(sum(measurement.point))
  hitormiss <- runif(1, lower.limit, upper.limit)
  if (hitormiss <= point.value) hitcounter <- 1 else hitcounter
### erzeugt genau eine Ber(p) Zufallszahl.
replicate(10, oneExperiment())
```

Aufgaben zur Klausurvorbereitung

1. Setzen Sie den Startwert des Zufallszahlengenerators auf Ihre Matrikelnummer!

2. Welches ist die maximal mögliche Zykluslänge für einen linearen Kongruenzgenerator der Form

$$X_{n+1} = aX_n + c \mod m?$$

   Wieso?

3. Gegeben ist eine Zufallsvariable mit Realisierungen aus $[0, 1]$, und ihre Dichte

$$f_X(x) = 3x^2 \text{ für } 0 \leq x \leq 1.$$

   Erzeugen Sie jeweils ein `R` Programm, welches eine Zufallszahl gemäß dieser Verteilung

- mittels ARM,
- bzw. mittels der Inversionsmethode erzeugt.

4. Berechnen Sie mittels einer geeigneten Monte-Carlo-Methode das Integral der Funktion
$$f(x,y) = |\sin(x+y)| \cdot x^2 e^{-y-x}$$
für $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 5$. Erlauben Sie als Parameter die Anzahl der Durchläufe. Geben Sie den Schätzer für das Integral und die Konfidenzintervallbreite für $\alpha = 0.05$ und $n = 10000$ Wiederholungen an. Begründen Sie die Wahl der Simulationsmethode!

5. Schreiben Sie ein Programm, um die Verteilung des Abstands zweier zufällig gewählter Punkte im Intervall [0,1] zu simulieren.
   - Der Bereich $[0,1]^n$ heißt n-dimensionaler Einheitswürfel. $[0,1]$ ist also der 1-dimensionale Einheitswürfel.

- Erweitern Sie dieses Programm, so dass als Parameter die Dimension des Einheitswürfels angegeben werden kann, in dem die beiden Punkte gewählt werden.
- Geben Sie für n= 100 und 10000 Wiederholungen und für die Dimensionen 1 bis 10 den Erwartungswert und die Varianz der Schätzer an.
- Zusatzaufgabe: Erzeugen Sie parallele Boxplots für die Dimensionen 1 bis 10 und n=1000 Wiederholungen für die gesuchten Abstände.