Lösung zur Übungsaufgabe 1

- Die Aufgabe, die ersten 20 Fibonacci Zahlen zu berechnen, lässt sich mit jeder der eingeführten Schleifenkonstruktionen lösen. Für alle Versionen lassen sich zunächst die Startwerte festlegen:

```
> fib <- c(1,1) # Vektor der Länge 2
```

- Die Lösungen im Einzelnen: Zunächst mit `for()`

```
> for (i in 3:20) fib <- c(fib, fib[i-1] + fib[i-2])
```

Interessant ist an dieser Lösung, dass der Vektor nicht im Vorhinein in der Länge festgelegt werden muss. Neue Werte werden während des Programmlaufs angehängt.

- Zweite Möglichkeit `while()`:

```
> i <- 3
> while (i < 21) {fib <- c(fib, fib[i-1] + fib[i-2])
                  i <- i+1 }
```

- Schliesslich `repeat`:

```
> i <- 3
> repeat { fib <- c(fib, fib[i-1] + fib[i-2]) ; i <- i+1
if (i == 21) break}
```

- Alle Methoden, die auf der Zuweisung von Werten an Positionen in einem Vektor beruhen, lassen sich erheblich beschleunigen, wenn ein passend langer Ergebnisvektor vor dem Eintritt in die Schleife allokiert wird.

Einige Laufzeiten

```
> system.time({fib <- c(1,1) ;
  for (i in 3:1500) {fib <- c(fib, fib[i-1] + fib[i-2]) }} )
       User      System verstrichen
      0.036       0.008       0.042
> system.time({ fib <- c(1,1) ; i <- 3 ;
  repeat { fib <- c(fib, fib[i-1] + fib[i-2]); i <- i+1 ;
  if (i == 1501) break}})
       User      System verstrichen
      0.064       0.008       0.079
> system.time ( { fib <- c(1,1) ;i <- 3;
   while (i < 1501) {fib <- c(fib, fib[i-1] + fib[i-2]);
   i <- i+1 }})
       User      System verstrichen
      0.048       0.000       0.051
```

Und mit definiertem Ergebnisvektor

```
> system.time({fib <- rep(1,1500) ;
   for (i in 3:1500) {fib[i] <- fib[i-1] + fib[i-2] }} )
       User      System verstrichen
      0.032       0.000       0.033
> system.time({ fib <- rep(1,1500) ; i <- 3 ;
   repeat { fib[i] <- fib[i-1] + fib[i-2] ; i <- i+1 ;
  if (i == 1501) break}})
       User      System verstrichen
      0.036       0.000       0.046
> system.time ( { fib <- rep(1, 1500) ;i <- 3;
   while (i < 1501) {fib <- fib[i-1] + fib[i-2] ; i <- i+1 }})
       User      System verstrichen
      0.032       0.000       0.032
```

Lösung der Übung 1 mit Rekursion

- Ein ganz anderer Ansatz ist die Berechnung der Fibonacci Zahlen direkt über die rekursive Definition der Zahlen:

```
> fib <- function(n){
         if ((n==1) | (n==2)) 1 else fib(n-1) + fib(n-2)}
```

- Rekursion ist mit Vorsicht zu geniessen. Einerseits extrem elegant, andererseit mit einem enormen Overhead verbunden. Die Verarbeitung wird sehr schnell sehr langsam.

```
> system.time(fib(30))
       User      System verstrichen
     12.712       0.016      13.374
```

Kurze Geschichte des “Zufalls”

- Die Idee von “Zufall” ist sehr alt. “Zufall” steht hier zum einen für die Nichtvorhersagbarkeit und deshalb auch für das Fehlen einer (guten oder bösen) Absicht, zum anderen durch die Gleichmäßigkeit für eine gewisse Gerechtigkeit.

- Bspw. findet sich in der Bibel, viertes Buch Mose (Numeri) Kap 33, Vers 54:

> Und ihr sollt das Land austeilen durchs Los unter eure Geschlechter. Dem Geschlecht, das groß ist, sollt ihr ein großes Erbe geben und dem, das klein ist, sollt ihr ein kleines Erbe geben. Worauf das Los für jeden fällt, das soll er haben. Nach den Stämmen eurer Väter sollt ihr’s austeilen.

- Einige der ältesten Spiele sind Würfelspiele. Würfel sind aus der Zeit um 700 v. Chr. erhalten!

- Viele alte, religiöse Riten sind verbunden mit Zufallsmechanismen, bei denen sich der göttliche Wille durch den unvorhersehbaren Ausgang eines Experiments manifestieren soll ("Stäbchenorakel", "Eingeweideschau").

- Heute haben Zufallsexperimente, neben der Wissenschaft, ihre größte Bedeutung beim Glückspiel.

Aktuelle Anwendungen von generiertem Zufall

- Früher waren die Geräte um Zufallsexperiment durchzuführen physisch (Roulettetische, Kartenmischer, Würfel, die Lottotrommel)
- Heute wird all das auch im Computer simuliert
- Online-Glückspiel: Poker, Backgammon etc.
- Deshalb ist eine grosse Gewissheit über die Eigenschaften der verwendeten Zufallsgeneratoren sehr wichtig.
- Wichtige Rolle in der Kryptographie!
- Teilweise ist gesetzlich geregelt, wie Zufall erzeugt werden darf!

“Zufall” und der “freie Wille”

- Eine alte und gerade sehr aktuelle Diskussion rankt sich um die deterministische oder nicht deterministische Natur der Welt.

- Habe ich den Entschluss gefasst diese Vorlesung zu halten? Oder stand es von Anbeginn der Welt fest, da die Ausgangsbedingungen einen definierten Zustand hatten, den man im Prinzip vollständig erfassen und beschreiben könnte, und es deshalb völlig unausweichlich war, dass es sogar dazu kommen würde?

- Wenn es nicht feststand, woher kommt die Abweichung vom deterministischen, also berechenbaren, Prozess? Kann man das Zufall nennen?

- Die Diskussion ist keineswegs entschieden, sowohl unter Physikern als auch unter Philosophen gibt es Verfechter beider Sichtweisen.
- Kant, Kritik der reinen Vernunft: “In einer Welt ohne Zufall gibt es keine freien Willen!”
- Einstein: “Gott würfelt nicht!”
- Interessantes Buch zu dem Thema: Roger Penrose, Shadows of the Mind (Schatten des Geistes). Er hofft auf Quantenprozess im Gehirn, um den freien Willen für uns zu retten.

“Zufall” in der Natur

- Eine mögliche Definition sagt, dass Zufall einen Prozess beeinflusst, wenn unter vollständiger Kontrolle aller Einstellungen ein Wiederholungsexperiment auch einen anderen Ausgang nehmen kann.
- In der Natur existieren tatsächliche entsprechende Phänomene.
- Beispielsweise beim Photonenreflektorexperiment, bei dem einzelne Photonen auf eine spezielle Optik gesendet werden, von der sie mit W’keit 0.5 reflektiert werden oder die Optik durchdringen.
- Das Experiment kann als vollständig kontrolliert angesehen werden, jedoch tritt jeweils eines von zwei möglichen Ergebnissen ein.
- Physikalische Details zu diesem Experiment unter quantumlab.de.

- Ein anderes Phänomen, bei dem in der Natur Zufall auftritt, ist der radioaktive Zerfall bestimmter Elemente. Betrachtet man die Wartezeit auf den Zerfall eine Atoms, so kann man den Zeitpunkt dieses Ereignisses nicht vorhersagen. (Gedächtnislose Verteilung!) In der Verteilug sind die Zeitdauern bei der Beobachtung vieler Atome allerdings sehr vorhersagbar (Halbwertszeit!).

- Ein alltägliches Phänomen, dass Zufall in der Natur beobachtbar macht, sind Schwankungen im thermischen Rauschen elektrischer Bauteile. Bsp: Rauschen im Fernseher.

- Kein Zufall, obwohl es oft danach aussieht sind die sogenannten chaotischen Prozesse (Fraktale, Wetterphänomene etc.) Diese sind (zumindest die Theorie dazu) berechenbar und deterministisch, sind jedoch für uns nicht intuitiv vorhersagbar, wirken also “zufällig”.

Übersetzung des Begriffs “Zufall” in die Mathematik

- Was bedeutet “Zufall” oder “zufällig” als operationaler Begriff?

- Auf der einen Seite hat jede/r eine Intuition, was er für zufällig hält und was nicht.

- “Zufällig” als umgangssprachlicher Begriff korrespondiert stets mit der Annahmen der gleichen Wahrscheinlichkeit vom Elementarereignissen wie “Kopf” oder “Zahl”, bzw. der Proportionalität der Wahrscheinlichkeiten zu Mächtigkeiten von Mengen von Elementarereignissen (Intervalllängen!).

- Schaut man auf der anderen Seite auf zehn unabhängige Würfe einer fairen Münze mit den Ausgängen **K** oder **Z**, einem mathematisch sauber beschriebenem Ereignis, so sind die Ergebnisfolgen **KKKKKKKKKK** und **KZZKZKKKZK** exakt gleich wahrscheinlich, nämlich $\frac{1}{2}^{10}$!

- In diesem Sinne scheint es also endlichen zufälligen Folgen geben, denn alle endlichen Folgen identischer Länge sind gleich wahrscheinlich!

- Dieses Ergebnis steht natürlich im Widerspruch zu unserer Intuition von “zufällig”. Eine Folge von zehnmal Kopf sind wir nicht bereit als Zufallsfolge zu akzeptieren.

- Was erwartet man also von einer Folge, die den Namen Zufallsfolge verdient? Wie kann man diesen Begriff der Umgangssprache so präzisieren, dass man die Zufälligkeit messen oder bewerten kann?

- Eine Definition gegeben von J.N. Franklin (1962): Eine Folge heißt zufällig, wenn sie jede Eigenschaft besitzt, die alle unendlichen Folgen unabhängiger Stichproben aus der Gleichverteilung besitzen.

- Eine mathematisch rigidere, interessante Definition liefert Knuth, The Art of Computer Programming, vol 2:

  Eine Folge U_n von Werten aus [0,1) heißt zufällig, wenn für jede Eigenschaft E für die gilt, dass $P(E(V_n)) = 1$ für jede Folge V_n aus unabhängig identisch verteilten Zufallvariablen aus [0,1) gilt: $E(U_n)$ ist wahr.

- Die Idee ist also, Eigenschaften von Folgen aus Zufallsvariablen auf [0,1) mathematisch herzuleiten und dann zu überprüfen, ob diese Eigenschaften erfüllt sind.

- Exemplarisch sollen jetzt "menschengemachte" Zufallszahlen mit einer solchen Eigenschaft verglichen werden.

Experiment zum Zufallsempfinden

- Jede/r notiere bitte eine Folge von 20 Ziffern 0 oder 1, die er oder sie als Zufallsfolge empfinden würde.
- Bitte zählen, wie häufig ein Wechsel von 0 auf 1 oder von 1 auf 0 vorkommt.
- Verteilung:

Eine entsprechende Simulation in R

- In einer Simulation wird nun dasselbe Experiment nachgestellt und empirisch der wahre Wert für die Eigenschaft “erwartete Anzahl von Ziffernwechseln” hergeleitet.

- Für den Moment sei akzeptiert, dass die Zufallsfunktionen in R brauchbar programmiert sind!

- Für eine Simulation zerlegt man das Problem in kleine Schritte, löst diese und setzt dann aus diesen kleinen Teilen die vollständige Simulation zusammen.

Die Einzelschritte

1. Erzeugen eines Zufallsvektors der Länge 20 mit Einträgen 0 oder 1

```
> vektor1 <- sample(c(0,1), 20, replace=TRUE)
```

2. Zählen der Übergänge von einer Zahl zur anderen.

3. Es gibt beliebig viele mögliche Lösungen, z.B. über Schleifen.

4. Elegant über die Funktion `diff()`.

```
> diff(vektor1) # z.B.
 [1]  1  0 -1  1  0 -1  1  0 -1  0  0  1  0  0  0  0  0 -1  0
```

5. Wie viele Einträge sind ungleich 0?

```
> length(which(diff(s1) != 0))
[1] 8
```

6. Diese Zahl ist das Ergebnis eines einzelnen Simulationslaufs.

7. In der großen Simulation wird dann eine große Anzahl Wiederholungen durchgeführt und die Einzelergebnisse einem Ergebnisvektor gespeichert.

Die vollständige Simulation

- Als Programm, dass dieses Experiment 10000 mal durchführt:

```
results <- rep(NA, 10000)
for (i in 1:10000){
  results[i] <- length(
                     which(
                           diff(
                                sample(c(0,1), 20, replace=TRUE)
                                ) != 0)
                     )
}
table(results)
mean(results) # 9.51..
```

Analytische Herleitung

- Das Ergebnis lässt sich in diesem Fall auch analytisch herleiten. Mit W'keit 0.5 findet an jeder Stelle ein Übergang statt, der Erwartungswert für die Zahl der Ziffernwechsel ist also exakt 19 * 0.5 = 9.5.

- In der Literatur finden sich extensive Analysen, die auf eine Wechselwahrscheinlichkeit von ca. 0.6 kommen, wenn Menschen versuchen sich zufällige Zahlenfolgen auszudenken.

- Der Mensch ist nicht besonders gut darin, eine zufällige Folge als solche zu erkennen!

- Ein anderes, ebenso verräterisches Merkmal ist die Länge der längsten Folge gleicher Ziffern in einer Zufallsfolge. Ein Mensch traut sich nicht viele gleiche Ziffern in eine Folge zu setzen, die zufällig wirken soll.

Aufgabe 2:

Finden Sie über eine Simulation den mittlere Länge der längsten Ziffernfolge in einem Zufallsvektor der Länge 20!

Hinweis: Verwenden Sie die Struktur aus dem obigen Beispiel. Sie benötigen dann noch ein Verfahren die Länge der Ziffernfolgen zu bestimmen.