Simulation der Erlang Verteilung

- Implementieren Sie zwei Zufallsgeneratoren `erlang1()` und `erlang2()` für die Erlang-Verteilung. λ und n sowie die Zahl der zu erzeugenden Zufallszahlen sollen übergeben werden können.

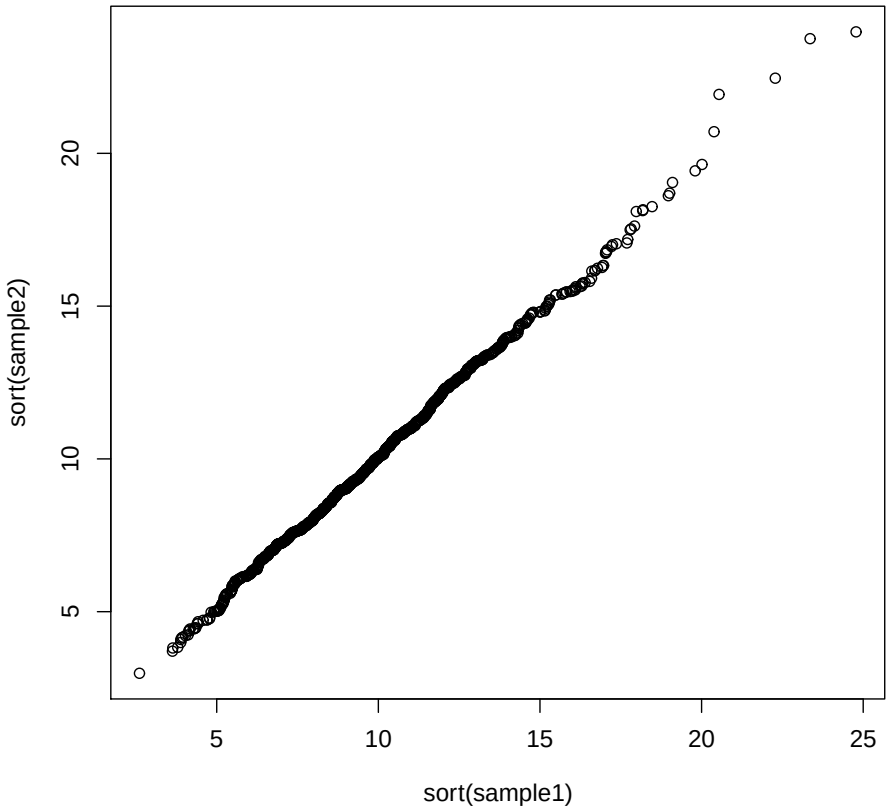
- Einmal sollen die Zufallszahlen aus der Gleichverteilung, das andere Mal aus der Exponentialverteilung gebildet werden.

- Vergleichen Sie für den Stichprobenumfang 1000 die empirischen Verteilungsfunktionen für beide Verfahren in einem geeigneten Q-Q-Plot!

Lösung

```
## 1. Variante ueber Exponential
## Achtung: in R gilt E(rexp(1, rate)) = 1/rate
erlang1 <- function (n, lambda) sum(rexp(n, rate=lambda))
### eine Erlang-Zz
rerlang <- function(anz, n, lambda)
           replicate(anz, erlang1(n, lambda))
### anz Erlang Zz
### 2. Variante Gleichverteilung
erlang2 <- function(n, lambda) (-1/lambda) * log(prod(runif(n)))
rerlang2 <- function(anz, n, lambda)
            replicate(anz, erlang2(n, lambda))
### Vergleich
sample1 <- rerlang(1000, n=10, lambda=1)
sample2 <- rerlang(1000, n=10, lambda=1)
plot(sort(sample1), sort(sample2))
```

Q-Q-Plot



Simulation des Ankunftsprozesses

- Der Ankunftsprozess $N(t)$ genüge einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = 2$.

- Erzeugen Sie einen Vektor, der die Ankunftszeiten der ersten 100 Kunden enthält.
  Lösung: Die Zwischenzeiten zwischen den Ankünften sind exponentialverteilt. Also:

```
zwischenzeiten <- rexp(100, 2)
ankunftszeiten <- cumsum(zwischenzeiten)
```

- Der Bearbeitungsprozess $B(t)$ genüge einer Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = 3$.

- Erzeugen Sie einen Vektor der ersten 100 Bearbeitungszeiten (Dauern).

```
bearbeitungszeiten <- rexp(100, 3)
```

- Können Sie daraus die Austrittszeitpunkte der $L(t)$ für die ersten 100 Kunden ableiten? Angenommen sei, dass der Prozess zum Zeitpunkt 0 leer mit dem Warten auf den ersten Kunden startet.

- **Lösung:** Hier sind einige Überlegungen anzustellen.

  1. **Fall:** Wenn ein Kunde direkt bearbeitet werden kann, ist sein Austrittszeitpunkt einfach Eintrittszeitpunkt + Bearbeitungszeit.
  2. **Fall:** Werden noch Kunden vorher bearbeitet, so ist der Bearbeitungsbeginn des neuen Kunden der Austrittszeitpunkt des Vorkunden.

- Änderungen an der Schlange treten immer nur dann auf, wenn entweder ein weiterer Kunde eintrifft oder ein Kunde abgefertigt ist.

```
### Initialisierungen:
zwischenzeiten <- rexp(100, 2) ; ankunftszeiten <- cumsum(zwischenzeiten)
bearbeitungszeiten <- rexp(100, 3)
austrittszeiten <- rep(NA,100)

### Sonderbehandlung des 1. Kunden
kunde <- 1
cat("Zeitpunkt ", kunde, " ", ankunftszeiten[i], " \n")
austrittszeiten[kunde] <- ankunftszeiten[kunde] + bearbeitungszeiten[kunde]

### Schleife über die restlichen Kunden
for (kunde in 2:100)  {
    if (ankunftszeiten[kunde] < austrittszeiten[kunde-1]){
      cat("Zeitpunkt ", i, " ", ankunftszeiten[kunde], " \n")
      cat("Begin der Bearbeitung :", austrittszeiten[kunde-1], "\n")
      austrittszeiten[kunde] <- austrittszeiten[kunde-1] +
                                bearbeitungszeiten[kunde]
  } else {
```

```
      cat("Zeitpunkt ", i, " ", ankunftszeiten[kunde], " \n")
      cat("Begin der Bearbeitung :", ankunftszeiten[kunde], "\n")
        austrittszeiten[kunde] <- ankunftszeiten[kunde] +
                                  bearbeitungszeiten[kunde]
     }  }
### oder kürzer
for (kunde in 2:100)  austrittszeiten[kunde] <-
        max(ankunftszeiten[kunde], austrittszeiten[kunde-1]) +
        beabeitungszeiten[kunde]
### Als Funktion
austrittsstrom <- function(ankunftszeiten, bearbeitungszeiten){
austrittszeiten <- rep(NA,length(ankunftszeiten))
austrittszeiten[1] <- ankunftszeiten[1] + bearbeitungszeiten[1]
for (kunde in 2:length(ankunftszeiten))
    austrittszeiten[kunde] <- max(ankunftszeiten[kunde],
                                  austrittszeiten[kunde-1]) +
                              bearbeitungszeiten[kunde]
austrittszeiten }
```

Der Steady-State einer Warteschlange

- Eine Warteschlange Q, für die gilt, dass $r < s$, also dass alle Anfragen bearbeitet werden können, besitzt eine Art Gleichgewichtszustand, im Folgenden Steady-State genannt.

- Im Programm zur letzten Übungsaufgabe konnte man sehen, dass der erste ankommende Kunde besonders behandelt wurde. Intuitiv beschreibt der Steady-State das Warteschlangensystem, wenn der Einfluss der Anfangsbedingungen verschwunden ist.

- Man nennt diesen Zustand auch "eingeschwungenes System".

- In Simulationen versucht man den Steady-State zu erzwingen, indem man mit Auswertungen erst beginnt, nachdem eine bestimmte Anzahl

(z.B. n=100 Anfragen bearbeitet) von Simulationsläufen abgearbeitet ist.

- Für den M/M/1 Fall lassen sich für den theoretischen Steady-State etliche Aussagen beweisen.

- Die folgenden theoretischen Aussagen beziehen sich alle auf M/M/1 Schlangen.

Einige analytische Eigenschaften von M/M/1

- Seien in einer M/M/1 Schlange λ die Ankunftsrate und μ die Bedienrate bekannt. Weiterhin bezeichne $p_n(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich zu einem Zeitpunkt t genau n Personen im System befinden. Hierbei bedeutet "im System" entweder schon in der Bedienung oder noch im Wartezustand.

- Dann kann man mit Ergebnisse über sogenanne Geburts- und Sterbeprozesse aus der Klasse der stetigen Markov-Ketten zeigen, dass diese Wahrscheinlichkeiten das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{dp_n(t)}{dt} &= -(\lambda+\mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) + \lambda p_{n-1}(t), \text{ für } n \geq 1 \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \end{aligned}$$

- **Definition:** Mathematisch definiert nun die Gleichung

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \frac{dp_0(t)}{dt} = 0$$

den Steady-State des Systems.

- Setzt man diese Bedingung in die Differentialgleichungen ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu}p_n - \frac{\lambda}{\mu}p_{n-1} \text{ für } n \geq 1; \\ p_1 &= \frac{\lambda}{\mu}p_0. \end{aligned}$$

- Iteratives Einsetzen ergibt nun, dass

$$p_{n+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

- Weiterhin, da p_0 nach Definition eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss gelten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1.$$

- Diese Summe konvergiert genau dann, wenn $\rho := \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

- ρ heißt der *Ausnutzungsgrad des Systems*.

- Die Berechnung der geometrischen Reihe ergibt nun

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho.$$

- Für den Steady-State einer M/M/1 Schlange gilt folglich, dass

$$p_n = \rho^n (1 - \rho)$$

  und dass ein solcher Steady-State nur existiert, wenn $\rho < 1$.

- Beispiel: Ein M/M/1 System mit $\lambda = 1$ und $\mu = 1.2$ sei gegeben. Dann gilt $p_n = \frac{5^n}{6^{n+1}}$. Besonders $p_0 = 1/6$, $p_1 = 5/36$ etc.

- Mittels dieser Verteilungsfunktion können bereits etliche interessante Maßzahlen des M/M/1 Systems analytisch hergeleitet werden.

- Für die erwartete Anzahl von Anfragen $L(t)$, die sich im Steady-State im System befinden gilt

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \text{ für } \rho < 1.$$

- Little's Theorem sagt dann, dass für die erwartete Zeit $W(t)$ bis zur Erledigung einer Anfrage im Steady-State gilt:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

- Weiterhin kann man die erwartete Schlangenlänge im Steady-State direkt

berechnen durch:

$$L_Q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\rho^n = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}, \text{ für } \rho < 1.$$

- Für die erwartete Zeit, die man mit Anstehen verbringt, also die reine Wartezeit W_Q in der Schlange gilt

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

- Ebenso lassen sich elementar herleiten die Verteilung der Zeit, die eine Anfrage im System verbringt $X(t)$:

$$X(t) = P(T_{\text{im System}} \leq t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t},$$

sowie die Verteilung der Zeit in der Warteschlange $X_Q(t)$:

$$X_Q(t) = P(T_{\text{in der Schlange}} \leq t) = 1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)t}.$$

Verteilung des Ausgangsstroms

- Gegeben sei ein M/M/1 System mit Ankunftsrate λ und größerer Bedienrate μ.

- Dann gilt: Die Zwischenzeiten beim Verlassen des Systems sind exponentialverteilt mit Parameter λ. Ankunftsstrom und Ausgangsstrom sind also Poissonprozesse mit identischer Rate λ.

- Dieses Ergebnis ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn man Systeme aus gekoppelten Warteschlangen betrachtet, denn es bedeutet, dass sich die Intensität des Ankunftsstromes durch das System fortpflanzt!

Aufgabe zu den Verteilungen im Steady-State

- Überprüfen Sie die Aussage der vorhergehenden Folie mittels einer geeigneten Simulation!

- Zeigen Sie dazu über wiederholte Simulationen, dass der Schätzer für den Parameter der Exponentialverteilung aus dem Austrittsstrom um den Parameter λ des Ankunftsstroms streut.

- Betrachten Sie Ströme mit 10000 Kunden, Ankunftsintensität $\lambda = 3$, Bedienintensität $\mu = 4$. Führen Sie 1000 Simulationen durch und schätzen Sie jeweils unter der Annahme einer Exponentialverteilung für die Austrittszwischenzeiten deren Intensität.

- Ein Schätzer $\hat{\lambda}$ für den Paramter λ einer Exponentialverteilung aus einer Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ ist z.B. $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

- Nutzen Sie die Funktion der Musterlösung der gestrigen Aufgabe.

Aufgabe zu den Schlangenlängen im Steady-State

- Extrahieren Sie zu gegebenem Ankunfts- und Bearbeitungsstrom die Schlangenlängen und die Anzahl von Anfragen im System zu den verschiedenen Zeitpunkten.

- Vergleichen Sie die theoretischen Vorhersagen mit den Simulationen für einen M/M/1 mit Ankunftsintensität $\lambda = 0.6$, Bedienintensität $\mu = 1$ und Beobachtungen über jeweils 10000 Kunden.

- Bestimmen Sie rechnerisch oder über Simulationen die Varianz der Zeit in der Warteschlange X_Q für diesen Prozess! (Zufallsgenerator über Inversionsmethode!)